Tentamen Groepentheorie, woensdag 2 februari 2011, 09.00–12.00.

De opgaven tellen alle vijf even zwaar. Beredeneer je antwoorden. *Veel Succes!*

(1) Gegeven is de vermenigvuldiggroep $G = (\mathbb{Z}/3700\mathbb{Z})^*$.
  (a) Bevat G een element van orde 5?
  (b) Bevat G een element van orde 37?
  (c) Bevat G een element van orde 8?

(2) Gegeven $\tau = (5\ 6\ 7\ 9\ 8)(3\ 4\ 5\ 6)(2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 7)$ in de groep S_9.
  (a) Bepaal de orde van τ.
  (b) Is τ een even of een oneven permutatie?
  (c) Hoeveel elementen bevat de conjugatieklasse van τ in S_9?

(3) Gegeven is een willekeurig priemgetal p. We definiëren de groep G, bestaande uit alle bijecties $\pi_{a,b}$ van de verzameling $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ naar zichzelf, gegeven door $\pi_{a,b}(x \bmod p^2) = (ax + b) \bmod p^2$, waarbij $b \in \{0, 1, 2, \ldots, p^2-1\}$ en $a = 1+k\cdot p$ voor $0 \leq k \leq p-1$.
  (a) Bepaal de inverse van $\pi_{a,b}$.
  (b) Gebruik $\pi_{1,1}$ en $\pi_{p+1,0}$ om aan te tonen dat G niet commutatief is.

(4) Gegeven zijn twee groepen G en H, en homomorfismen $f : G \to H$ en $g : H \to G$. Bewijs, dat als zowel de index van $f(G)$ in H als ook de index van $g(H)$ in G eindig zijn, dan volgt, dat de index van $g(f(G))$ in G ook eindig is.

(5) Bepaal alle getallen n die voorkomen als orde van een element van $\mathbb{Z}^3/H$, waarbij H de ondergroep is voortgebracht door $(2, 0, 2)$ en $(6, 6, 6)$ en $(8, 36, 38)$.

  Als het "vegen" dat voor deze som nodig is niet lukt, bepaal dan de ordes die voorkomen bij de groep

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}.$$